راهنمای حل مسائل

آمادگی برای آزمون‌های مستمر

ریاضی ۲

۱. الف)

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB.AC.\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow BC^۲ = (۳\sqrt{۲}+\sqrt{۶})^۲ + (۲\sqrt{۶})^۲ - ۲(۳\sqrt{۲}+\sqrt{۶})(۲\sqrt{۶})\times\frac{۱}{۲}$$

$$= ۱۸ + ۶ + ۱۲\sqrt{۳} + ۲۴ - ۱۲\sqrt{۳} - ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow BC = ۶$$

ب)

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۶}}{\sin B} = \frac{۶}{\sin A} = \frac{۶}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{۲\sqrt{۶}\times\sqrt{۳}}{۱۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \hat{B} = ۴۵^\circ$$

ج)

$$S = \frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A = \frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۶}(۳\sqrt{۲}+\sqrt{۶}).\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$= \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}(۳\sqrt{۲}+\sqrt{۶}) = ۹ + ۳\sqrt{۳}$$

۲.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$B^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ - B^۲ = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} = C \Rightarrow |C| = ۱۳$$

$$\Rightarrow C^{-۱} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۳} & -\frac{۳}{۱۳} \\ \frac{۳}{۱۳} & \frac{۴}{۱۳} \end{bmatrix}$$

۳.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۲ \\ ۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ - A = \begin{bmatrix} ۸ & ۹ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$A^۲ - A = X - AX = X(I - A) = \begin{bmatrix} ۸ & ۹ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$X\underbrace{\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} ۸ & ۹ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

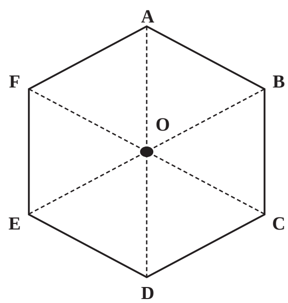
$$B^{-۱} = \frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \\ -\frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

$$XB = \begin{bmatrix} ۸ & ۹ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow X(\underbrace{BB^{-۱}}_{I}) = \begin{bmatrix} ۸ & ۹ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \\ -\frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

هندسهٔ ۱

۱. پای ارتفاع هرم، مرکز شش‌ضلعی قاعده (O) است و می‌دانیم مثلث‌های OAB، OBC و... متساوی‌الاضلاع هستند. بنابراین: OA=OB=OC=...=a



حال اگر S رأس هرم باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $(SO \perp OB)SOB$ داریم: $SO^۲+OB^۲=SB^۲$ و در نتیجه: $SO^۲+a^۲=b^۲$ و SO ارتفاع هرم برابر است با: $\sqrt{b^۲-a^۲}$ و در نتیجه حجم هرم برابر است با:

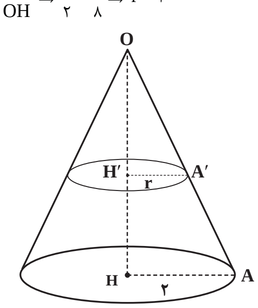
$$V = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳}\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲.\sqrt{b^۲-a^۲} = \frac{\sqrt{۳}a^۲\sqrt{b^۲-a^۲}}{۲}$$

مساحت وجه‌های جانبی، یعنی مثلث‌های متساوی‌الساقین با ساق‌های b و قاعدهٔ a برابر است با: $S = \frac{۱}{۲}a\sqrt{b^۲-\frac{a^۲}{۴}}$ (چرا؟) پس مساحت کل هرم برابر است با:

$$S = ۳a\sqrt{b^۲-\frac{a^۲}{۴}} + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

۲. مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ فوق و مخروط، دایره‌ای به شعاع r است. در مثلث OHA به کمک قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

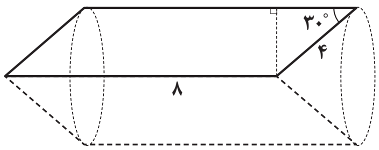
$$\frac{HA'}{HA} = \frac{OH'}{OH} \Rightarrow \frac{r}{۲} = \frac{۴}{۸} \Rightarrow r = ۱$$



و حجم موردنظر، تفاضل حجم‌های دو مخروط است:

$$V = V_۱ - V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi(۲)^۲\times ۸ - \frac{۱}{۳}\pi(۱)^۲\times ۴ = \frac{۲۸\pi}{۳}$$

۳. از دوران متوازی‌الاضلاع حول ضلع بزرگ آن، شکلی حاصل می‌شود که استوانه‌ای است که یک مخروط به آن اضافه شده و یک مخروط از آن برداشته شده است.



بنابراین حجم این شکل با حجم استوانه برابر است. ارتفاع این استوانه ۸ سانتی‌متر و شعاع قاعدهٔ آن (r) ۲ سانتی‌متر است. (چرا؟) پس حجم آن برابر است با:

$$V = \pi(۲^۲)\times ۸ = ۳۲\pi$$

هندسهٔ ۲

۱. نقطه‌های $A(x,y)$ و $A'(۲\alpha-x,۲\beta-y)$ را در نظر می‌گیریم. وسط AA' نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ است. پس A' بازتاب A نسبت به O است. حال بازتاب خط $۲x-y=۴$ را به کمک این دستور به‌دست می‌آوریم:

$T(x,y)=(۲-x,۴-y)=(X,Y)$

$$\begin{cases} ۲-x=X \\ ۴-y=Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲-X \\ y=۴-Y \end{cases} \Rightarrow ۲(۲-X)-(۴-Y)=۴$$

$$\Rightarrow Y - ۲X = ۴$$

۲.

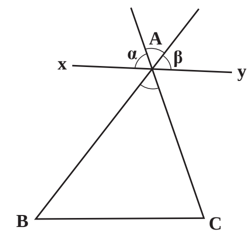
$$T_۱(x,y) = (۲x,۲y) = (X,Y) \Rightarrow x = \frac{X}{۲}, y = \frac{Y}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲(\frac{Y}{۲}) + \frac{X}{۲} = ۲ \Rightarrow X + ۲Y = ۴$$

$$T_۲(x,y) = (-y,x) = (X,Y) \Rightarrow \begin{cases} y=-X \\ x=Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y - ۲X = ۴$$

۳. زاویهٔ B را با انتقال در راستای بردار $\overrightarrow{BA}$ و زاویهٔ C را با انتقال در راستای بردار CA جابه‌جا می‌کنیم. اگر انتقال یافتهٔ $\hat{B}$، زاویهٔ β و انتقال یافتهٔ $\hat{C}$، زاویهٔ α باشد، داریم: $\hat{\beta}=\hat{B}$، $\hat{\alpha}=\hat{C}$ ، $Ax\|BC$ و $Ay\|BC$. پس Ax و Ay در یک راستا هستند و متقابل به رأس زاویهٔ A با زوایای α و β یک زاویهٔ نیم‌صفحه تشکیل می‌دهد. پس: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{A}=180^\circ$ و در نتیجه: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.



حسابان

۱.

الف) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 3x-\sin x\cos x}{\tan^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos 3x-\cos x)}{\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(-2\sin 2x\sin x)}{\tan^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2(\frac{\sin x}{x})^2(\frac{\sin 2x}{2x}).(2x^3)}{(\frac{\tan x}{x})^3.x^3}=-4$$

ب) $x=\frac{\pi}{4}+t$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan(\frac{\pi}{4}+t)-\tan(\frac{3\pi}{4}+3t)}{\sin(\frac{\pi}{4}+t)-\cos(\frac{\pi}{4}+t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1+\tan t}{1-\tan t}-\frac{1+\tan 3t}{1-\tan 3t}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2\tan t-2\tan 3t}{(1-\tan t)(1-\tan 3t)}}{\sqrt{2}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2(\frac{\sin(t-3t)}{\cos t\cos 3t})}{\sqrt{2}\sin t(1-\tan t)(1-\tan 3t)}=\ldots=-2\sqrt{2}$$

۲. $$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{a\sin\pi x}{x-1}+b\quad(x=1+t,t\to 0^+)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{a\sin(\pi+\pi t)}{t}+b=\lim_{t\to 0^+}\frac{-a\sin\pi t}{t}+b=-a\pi+b$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}a\pi[\pi x]+b[-x]=3a\pi-b,f(1)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a\pi+b=\frac{1}{2}\\ 3a\pi-b=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow 2a\pi=1,a=\frac{1}{2\pi},b=1$$

۳. نقطه‌ای به طول ۱ روی خط y=۲x+۱، نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$ است. بنابراین، این نقطه روی منحنی هم هست و در نتیجه: a+b=۳ و شیب مماس بر منحنی در این نقطه مساوی ۲ است:

$$y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y'(1)=\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=4,b=-1$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$

فرض بر این است که این معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که طول‌های نقاط ماکزی‌مم و مینی‌مم هستند. مجموع طول‌های این دو نقطه برابر است با $\frac{-2b}{3a}$ و مجموع عرض‌های آن‌ها برابر است با:

$$y_1+y_2=f(x_1)+f(x_2)$$
$$=a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)+2d$$
$$=a[(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)]+b[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]$$
$$+c(x_1+x_2)+2d$$
$$=a\left[(\frac{-2b}{3a})^3-3(\frac{c}{3a})(\frac{-2b}{3a})\right]+b\left[(\frac{-2b}{3a})^2-2(\frac{c}{3a})\right]$$
$$+c(\frac{-2b}{3a})+2d=\frac{4b^3-18abc+54a^2d}{27a^2}$$

بنابراین مختصات وسط این دو نقطه برابر است با:

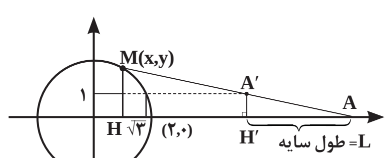
$$M(\frac{-b}{3a},\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2})$$

و به‌سادگی می‌توان نشان داد که این نقطه همان نقطهٔ عطف تابع است:

$$f''(x)=6ax+2b=0\Rightarrow x_0=-\frac{b}{3a},$$
$$f(x_0)=f(-\frac{b}{3a})=a(-\frac{b}{3a})^3+b(-\frac{b}{3a})^2+c(-\frac{b}{3a})+d$$
$$=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2}$$

۲. $$A'H'=1$$

$$\frac{A'H'}{MH}=\frac{AH'}{AH}\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{L}{(L+2+2-x)}$$
$$\Rightarrow Ly=L+4-x\Rightarrow\frac{dL}{dt}-\frac{dx}{dt}$$
$$=L\frac{dy}{dt}+y\frac{dL}{dt}\,(*)\quad\frac{dx}{dt}=0/1,$$
$$x=1,\ y=\sqrt{3},\ L=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$$
$$x^2+y^2=4\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$
$$\Rightarrow 2(1)(0/1)+2(\sqrt{3}).\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{30}$$



با جای‌گذاری این مقادیر در رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$\frac{dL}{dt}-0/1=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}\times(\frac{-\sqrt{3}}{30})+\sqrt{3}(\frac{dL}{dt})$$

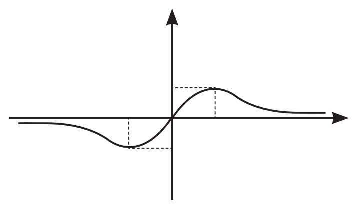
و از معادله فوق نتیجه می‌شود: $\frac{dL}{dt}=\frac{2+\sqrt{3}}{20}$

۳. $$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0$$

$$\Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	
$f(x)$	۰	↘	−۱ min	↗	۱ max	↘	۰

$$f''(x)=\frac{-4x(1+x^2)^2-4(2x)(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$



با حل معادلهٔ $f''(x)=0$ سه ریشهٔ حقیقی $x_1=0$ و $x_2=\sqrt{3}$ و $x_3=-\sqrt{3}$ به‌دست می‌آید که طول‌های نقاط عطف هستند (جدول تغییرات $f''(x)$ را رسم کنید). بنابراین سه نقطهٔ عطف $A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$، $B\left|\begin{matrix}\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-\sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right.$ به‌دست می‌آیند و با محاسبهٔ شیب‌های AB و AC نتیجه بگیرید که این سه نقطه بر یک استقامت‌اند.

ریاضیات گسسته

۱. سه پیشامد انتخاب ظرف اول، انتخاب ظرف دوم و انتخاب ظرف سوم را B_1 و B_2 و B_3 تعریف کنید و سپس برای حل مسئله از قانون احتمال کل کمک بگیرید.

۲. از قانون احتمال کل استفاده کنید. جواب آخر: $\frac{32}{53}$.

۳. ناسازگاری دو پیشامد به استقلال دو پیشامد ربطی ندارد.

جبر و احتمال

۱. از دستور احتمال دوجمله‌ای استفاده کنید.

۲. الف) از اینکه مجموع احتمال‌های برد a و b و c برابر ۱ است، استفاده کنید.
ب) از دستور احتمال $a\cup b$ استفاده کنید.

۳. سه پاره‌خط زمانی تشکیل مثلث می‌دهند که طول هر پاره‌خط از مجموع طول‌های دو پاره‌خط دیگر کمتر باشد. سپس از روش احتمال پیشامدهای پیوسته استفاده کنید.

ریاضیات سوم علوم‌تجربی

۱. الف) از x در صورت و مخرج فاکتور بگیرید و فرض کنید: $\frac{1}{x}=t$.

ب) چون درجهٔ صورت از مخرج بیشتر است، حد کسر بی‌نهایت می‌شود و علامت بی‌نهایت از درجهٔ $x^{5-2}=x^3$ به‌دست می‌آید.

۲. شرط پیوستگی در نقطهٔ داده شده را برقرار کنید و a و b را به‌دست آورید که a=-۲ و b=۴ حاصل می‌شود.

۳. با اِعمال شرط پیوستگی در $x_0=0$ برای a دو مقدار (±۱) به‌دست می‌آید که a=-۱ قابل قبول نیست. زیرا برای a=-۱ تابع در $x_0=0$ ناپیوسته می‌شود.